JOURNAL OF ALGEBRA 70, 179–199 (1981)

Zur Arithmetik von Konjugationsklassen in algebraischen Gruppen

HANS-JOCHEN BARTELS

Mathematisches Institut der Universität Göttingen, Bunsenstraße 3/5 D-34 Göttingen, Germany

Communicated by B. Huppert

Received June 16, 1980

EINLEITUNG

Anders als im Fall algebraisch abgeschlossener Körper ist über die Konjugationsklassen in linearen algebraischen Gruppen bei beliebigen Grundkörpern allgemein wenig bekannt. In einer grundlegenden Arbeit von G. E. Wall (1963) [19], die auf Resultate von J. Williamson aus dem Jahre 1939 zurückgreift, wird für unitäre, orthogonale und symplektische Gruppen über beliebigen Grundkörpern die Bestimmung der Konjugationsklassen auf das Klassifikationsproblem bestimmter Sesquilinearformen zurückgeführt, so daß über bestimmten Grundkörpern, wie z. B. den artihmetisch interessanten Körpern, eine Klassifikation jedenfalls im Prinzip möglich ist. Dieser Ansatz ist dann mit einigen Änderungen, die die Wall'schen Überlegungen übersichtlicher machen, von J. Milnor [13] dazu verwendet worden, den folgenden Satz zu beweisen:

SATZ. *Es seien q eine nichtausgeartete quadratische Form über dem lokalen Körper K,* Char $K \neq 2$, *O_q die zugehörige orthogonale Gruppe und $x, y \in O_q(K)$ orthogonale Transformationen mit irreduziblen Minimalpolynomen über K. x und y sind genau dann konjugiert in $O_q(K)$, wenn sie dasselbe irreduzible Minimalpolynom besitzen.*

In [13] wird keine Auskunft darüber gegeben, in welchen klassischen Gruppen ein entsprechendes Resultat richtig ist.

Unter Verwendung klassicher Lokal–Global–Prinzipien für quadratische und hermitesche Formen hat dann T. Asai in [2] gezeigt:

SATZ. *Es seien K ein Zahlkörper und G eine über K definierte orthogonale (bzw. symplektische, bzw. unitäre) Gruppe und x, $y \in G(K)$.*

0021-8693/81/050179–21$02.00/0

Dann sind x und y genau dann konjugiert in $G(K)$, wenn x und y für alle Primstellen v von K in $G(K_v)$ konjugiert sind.

Eine Methode, die in den obigen Sätzen angesprochenen Fragen vorteilhaft zu behandeln, nämlich die Verwendung von Galoiskohomologie, scheint in diesem Zusammenhang zu wenig berücksichtigt zu sein. Die Übersichtlichkeit dieser Methode soll in dieser Note an Hand einiger klassicher Gruppen kurz demonstriert werden. Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

In Sektion 1 wird nach einigen allgemeinen Vorbemerkungen der Fall eines lokalkompakten Grundkörpers K behandelt. Für viele klassische Gruppen, nämlich die Normeinsgruppen von zentralen einfachen K-Algebren (Sektion 1b)), die unitären (bzw. die speziellen unitären) Gruppen zu hermiteschen Formen, die zu quadratischen Erweiterungen des Grundkörpers gehören (Sektion 1a) und c)), sowie für die durch Algebren mit einer Involution erster Art definierten klassischen Gruppen (Sektion 1d und 1e) läßt sich durch die Berechnung der Galoiskohomologie von Zentralisatoren die Anzahl der verschiedenen Konjugationsklassen zu einem gegebenen irreduziblen Minimalpolynom explizit angeben; das liefert dann unter anderem ein dem Milnor'schen Satz entsprechendes Ergebnis für die unitären Gruppen zu hermiteschen Formen (Sektion 1, Satz 1).

Bei der Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Konjugationsklassen zu einem gegebenen irreduziblen Minimalpolynom werden die Berechnung der Galoiskohomologie klassischer Gruppen über lokalen Körpern nach [12] und Eigenschaften der Corestriktions- und Restriktionsabbildung bei lokalen Körpern (vgl. [16]) herangezogen. Letzteres ist solange unproblematisch, wie man separable Erweiterungen vorliegen hat. Aus diesem Grunde wird in Sektion 1 im wesentlichen nur der Fall vollständig behandelt, in dem K die Charakteristik 0 hat; zu dem Fall Char $K > 0$ vergleiche man die Bemerkung am Ende von Sektion 1.

In Sektion 2 ist der Grundkörper K endlich algebraisch über $\mathbb{Q}$. Die Frage, wann ein Lokal-Global-Prinzip für die Konjugationsklassen in einer halbeinfachen algebraischen Gruppe G über K gilt, kann dann kohomologisch umformuliert werden (Sektion 2, Satz 4). Bei der Untersuchung dieser Frage beschränken wir uns auf den bei Asai nicht behandelten Fall der inneren Formen der speziellen linearen Gruppen, da für sie der Wall'sche Ansatz und damit auch die Beweismethode von T. Asai versagt. Für die regulären Konjugationsklassen in den einfachzusammenhängenden halbeinfachen Gruppen vom Typ ${}^1A_n$ hängt die Frage nach einem Lokal–Global–Prinzip für Konjugationsklassen übrigens eng mit der Frage nach der Gültigkeit des Hasseschen Normensatzes zusammen. Es werden Beispiele angegeben, in denen ein Lokal–Global–Prinzip für die Konjugationsklassen richtig ist, so z. B. für die Gruppen SL_p, p Primzahl, sowie die Normeinsgruppen von Schiefkörpern mit Primzahlindex (Sektion 2, Satz 3, Lemma 5) und Beispiele, in denen dies nicht gilt (Sektion 2, Beispiel).

Herrn Prof. M. Kneser sei an dieser Stelle für die kritische Durchsicht der ersten Fassung des Manuskripts und die zahlreichen Verbesserungsvorschläge herzlich gedankt.

Bezeichnungen

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	sind der Reihe nach die natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen
A^*	die Einheitengruppe des Rings A
$[E:L]$	die Dimension der L-Algebra E über L
$\lvert\mu\rvert$	die Anzahl der Elemente der Menge μ
$x \sim y$ in $G(K)$	die Gruppenelemente x und y sind konjugiert in $G(K)$
GL_n	die allgemeine lineare Gruppe der Dimension n^2
SL_n	die spezielle lineare Gruppe
$Sp_{2n} \subseteq SL_{2n}$	die symplektische Gruppe
O_n	die orthogonale Gruppe zur quadratischen Form $q(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} x_1x_{m+1} + \cdots + x_mx_{2m} & \text{falls } n = 2m \\ x_1x_{m+1} + \cdots + x_mx_{2m} + x_{2m+1}^2 & \text{falls } n = 2m+1 \end{cases}$
G_m	die multiplikative Gruppe
$R_{K/K}$	der Weilsche Restriktionsfunktor
${}^1R_{K/k}G_m$	der Kern der Normabbildung $N_{K/k}: R_{K/k}G_m \to G_m$ (vgl. z. B. [15]).
${}^1K^*$	$= ({}^1R_{K/k}G_m)(k) =$ Normeinsgruppe der Erweiterung K/k
$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$	die Galoisgruppe der galoisschen Körpererweiterung $\bar{K}/K$
$H^i(\bar{K}/K, G)$	die i-te Galoiskohomologiemenge der $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-Gruppe $G(\bar{K})$ vgl. [12], [18].
RN_B	die reduzierte Norm der einfachen Algebra B vgl. [4, Sektion 12.3].
$(x_{ij})^t$	die zur Matrix (x_{ij}) transponierte Matrix

1. Konjugationsklassen in klassischen Gruppen über lokalen Körpern

G bezeichne im folgenden eine lineare algebraische Gruppe über dem Körper K. Dabei wird zunächst, um Schwierigkeiten mit inseparablen Erweiterungen zu vermeiden, stets $\mathrm{Char}\, K = 0$ bei sonst noch beliebigem

Körper K vorausgesetzt (zum Fall Char $K \neq 0$ vgl. die Bemerkung am Ende von Sektion 1). Ist $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K, so läßt sich die Entscheidung, ob zwei gegebene Elemente $x, y \in G(K)$ konjugiert in $G(K)$ sind, in zwei Schritten treffen:

(i) Man stelle fest, ob x, y in $G(\bar{K})$ konjugiert sind.

(ii) Man bestimme den Kern μ_y der Abbildung

$$H^1(\bar{K}/K, G_y) \to H_1(\bar{K}/K, G)$$

dabei ist G_y der Zentralisator von y in G.

Ist nämlich x konjugiert zu y in $G(\bar{K})$, etwa

$$x = zyz^{-1} \qquad \text{mit} \quad z \in G(\bar{K}), \tag{1}$$

so folgt für beliebige $s \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$:

$$a_s := z^{-1} \cdot {}^s z \in G_y(\bar{K}) \tag{2}$$

und für $s, t \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ ist $a_{st} = a_s \cdot {}^s a_t$. Ersetzt man in Gleichung (1) z durch $z \cdot w$ mit $w \in G_y(\bar{K})$, so erhält man anstelle von a_s einen zu a_s äquivalenten 1-Kozykel.

Jedem $x \in G(K)$, welches konjugiert zu $y \in G(K)$ über $\bar{K}$ ist, entspricht daher eine 1-Kohomologieklasse in $H^1(\bar{K}/K, G_y)$, die wegen (2) im Kern μ_y der Abbildung.

$H^1(\bar{K}/K, G_y) \to H_1(\bar{K}/K, G)$ liegt. Ist umgekehrt $a = (a_s) \in H^1(\bar{K}/K, G_y)$ im Kern dieser Abbildung, ist also etwa $a_s = z^{-1} \cdot {}^s z$ mit $z \in G(\bar{K})$, so setze man einfach $x := zyz^{-1}$ und rechnet dann sofort nach: ${}^s x = x$ für beliebige $s \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, also $x \in G(K)$. Damit hat man das

LEMMA 1. *Es seien $y \in G(K)$, $C(y) := \{x \in G(\bar{K}) \mid x \sim y$ in $G(\bar{K})\}$ und $m := |\mu_y|$. Dann zerfällt $C(y) \cap G(K)$ in genau m Konjugationsklassen in $G(K)$.*

(vgl. hierzu auch [3, S. 176, 177].)

Was den Punkt (i) angeht, so hat man im Hinblick auf den von Milnor in [13] behandelten Fall eines irreduziblen Minimalpolynoms zunächst das

LEMMA 2. *Ist A zentrale einfache K-Algebra und hat $x \in A$ ein über K irreduzibles Minimalpolynom, so läßt sich x über $\bar{K}$ in $GL_n(\bar{K}) = (A \otimes_K \bar{K})^*$ auf Diagonalgestalt transformieren. Das charakteristische Polynom von x ist eine Potenz des Minimalpolynoms.*

Zum Beweis vgl. etwa [4, Sektion 9.2, Proposition 5].

Die Kenntnis aller maximalen Tori in reduktiven Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern erlaubt es einem dann, im Fall eines irreduziblen Minimalpolynoms die Frage (i) in den meisten klassichen Gruppen positiv zu beantworten.

Genauer hat man folgendes: Jede K-Form G der Gruppen GL_n, SL_n, O_n oder Sp_n läßt sich nach Weil durch einfache K-Algebren bzw. durch einfache K-Algebren mit Involution beschreiben (vgl. [12, S. 30 ff]); in dieser Realisierung von G ist $G(K)$ Untergruppe der multiplikativen Gruppe einer einfachen K-algebra, dann ist es sinnvoll, von dem Minimalpolynom eines Elementes $x \in G(K)$ zu sprechen. Das sei im folgenden stets stillschweigend vorausgesetzt, wenn von Minimalpolynomen die Rede ist. Dann gilt das

LEMMA 3. *Ist G eine K-Form der Gruppen GL_n, SL_n, O_n oder Sp_n und haben $x, y \in G(K)$ dasselbe irreduzible Minimalpolynom $m(t) \in K[t]$ (bzw. dasselbe irreduzible Minimalpolynom $m(t) \in L[t]$, falls G äußere Form der Gruppen GL_n oder SL_n ist mit zugehöriger quadratischer Erweiterung L/K), so ist $x \sim y$ in $G(\bar{K})$.*

Beweis. Sei G etwa K-Form der orthogonalen Gruppe O_n. Die Behauptung des Lemmas ist sicher dann richtig, wenn $m(t) = t \pm 1$ ist. Andernfalls hat $m(t)$ geraden Grad (vgl. [13, Bemerkung 1.3]) und daher ist $n \equiv 0 \bmod 2$, weil eine Potenz von $m(t)$ das charakteristische Polynom von x bzw. y ist. Außerdem folgt notwendig $\det x = \det y = 1$. Die halbeinfachen Elemente x und y lassen sich in $O_n(\bar{K})$ (sogar schon in der speziellen orthogonalen Gruppe $SO_n(\bar{K})$) auf Diagonalgestalt transformieren, etwa:

$$x \sim \begin{bmatrix} \xi_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigcirc & \\ & & \xi_{n/2} & & & \\ & & & \xi_1^{-1} & & \\ & \bigcirc & & & \ddots & \\ & & & & & \xi_{n/2}^{-1} \end{bmatrix}$$

und

$$y \sim \begin{bmatrix} \eta_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigcirc & \\ & & \eta_{n/2} & & & \\ & & & \eta_1^{-1} & & \\ & \bigcirc & & & \ddots & \\ & & & & & \eta_{n/2}^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{in } O_n(\bar{K}).$$

Da x und y dasselbe Minimalpolynom und damit auch dasselbe charakteristische Polynom haben, stimmen die n-Tupel $(\xi_1,\ldots,\xi_{n/2}^{-1})$ und $(\eta_1,\ldots,\eta_{n/2}^{-1})$ bis auf die Reihenfolge überein.

In $O_n(\bar{K})$ sind dann x und$y$ zueinander konjugiert (man beachte, daß dies in $SO_n(\bar{K})$ i. a. nicht richtig ist!).

Der Beweis von Lemma 3 für den Fall einer K-form der Gruppe Sp_{2n} oder einer inneren Form der Gruppen GL_n bzw. SL_n ist noch einfacher als der für die orthogonalen Gruppen.

Ist G äußere Form der GL_n, so hat man für kommutative K-Algebren A, $G(A) = \{x \in B \otimes_K A \mid xx^I = 1\}$ mit einer einfachen Algebra B der Dimension $2 \cdot n^2$ über K, deren Zentrum L quadratisch über K ist, und $I: B \to B$ einer Involution zweiter Art.

Es ist $B \otimes_K \bar{K} = M_n(\bar{K}) \oplus M_n(\bar{K})$ und der Homomorphismus $\varphi: B \to B \otimes_K \bar{K} = M_n(\bar{K}) \oplus M_n(\bar{K}) \to^{pr_1} M_n(\bar{K})$ ist injektiv, wenn pr_1 die Projektion auf den ersten Summanden bezeichnet. $G(\bar{K})$ wird unter pr_1 bijektiv auf $GL_n(\bar{K}) = (M_n(\bar{K}))^*$ abgebildet. Für $y \in G(K) \subseteq B$ mit irreduziblem Minimalpolynom über L, ist $L[y] \subseteq B$ ein Körper, das Minimalpolynom von $\varphi(y) \in M_n(\bar{K})$ hat daher nur einfache Nullstellen und $\varphi(y)$ ist halbeinfach. Hat $x \in G(K)$ dasselbe Minimalpolynom wie y, so ist $\varphi(x)$ ebenso halbeinfach, und da $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ dasselbe Minimalpolynom haben, ist $\varphi(x)$ in $GL_n(\bar{K})$ konjugiert zu $\varphi(y)$. Entsprechend schließt man, wenn G äubere Form der SL_n ist.

Zur Beantwortung der Frage (ii) benötigt man meist spezielle Voraussetzungen über den Grundkörper K. Eine Ausnahme bilden die inneren Formen der Gruppen GL_n. Ist nämlich G die allgemeine lineare Gruppe einer zentralen einfachen K-Algebra, und haben x, $y \in G(K)$ dasselbe irreduzible Minimalpolynom $m(t) \in K[t]$, so sind die Körper $K[x] \cong K[t]/(m(t))$ und $K[y]$ isomorph und x und y sind konjugiert in $G(K)$ nach dem Satz von Skolem und Noether. Das ist für beliebige Grundkörper K richtig. Damit ist für jedes solche y $\mu_y = \{1\}$, was man natürlich auch mit kohomologischen Methoden hätte beweisen können. Zur Behandlung anderer klassischer Gruppen wird ab jetzt K als lokalkompakt, nicht diskret vorausgesetzt. Bei der Bestimmung von μ_y in (ii) betrachten wir der Reihe nach verschiedene Fälle.

a. *G ist äußere Form der GL_n*

Nach [12, S. 62/63] ist G unitäre Gruppe U_h einer hermiteschen Form h, die zu einer quadratischen Erweiterung L/K des Grundkörpers K gehört. G läßt sich explizit folgendermaßen beschreiben: Ist τ der nichttriviale K-Automorphismus von L und bezeichnet I die der hermiteschen Matrix $h \in M_n(L)$ vermöge $x = (x_{ij}) \mapsto h \cdot (x_{ij}^{\tau})^t \cdot h^{-1}$ entsprechende Involution zweiter Art auf $M_n(L)$, so gilt für beliebige kommutative K-Algebren A: $G(A) = \{x \in M_n(L) \otimes_K A \mid xx^{I \otimes \mathrm{id}} = 1\}$. $H^1(\bar{K}/K, U_h)$ klassifiziert die hermiteschen Formen h' über K gleicher Dimension wie h, und da K lokaler Körper ist, hat man daher (vgl. [11]):

$$|H^1(\bar{K}/K, U_h)| = \begin{cases} 2 & \text{falls} \quad K \neq \mathbb{R} \\ n+1 & \phantom{\text{falls}} \quad K = \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

Hat $y \in G(K) \subseteq M_n(L)$ irreduzibles Minimalpolynom $m(t)$ über L, so ist $F := L[y]$ Unterkörper von $M_n(L)$, der Zentralisator Z_y von y in $M_n(L)$ stimmt mit dem Zentralisator von F in $M_n(L)$ überein, ist also nach [4, Sektion 10.2] eine einfache zentrale F-Algebra in $M_n(L)$. Wegen $yy^I = 1$ induziert I eine Involution J auf Z_y, die auf dem Zentrum F von Z_y nichttrivial ist; J ist also wie I Involution zweiter Art. Nach [12, S.62] ist daher $Z_y \cong M_m(F)$ mit $m = n/[F:L]$. Bezeichnet σ die Einschränkung von J auf F, so existiert nach [12] eine σ-hermitesche Matrix $h' \in M_m(F)$, so daß $x^J = h' \cdot (x_{ij}^\sigma)^t \cdot (h')^{-1}$ für $x = (x_{ij}) \in M_m(F) = Z_y$ gilt. Ist schließlich $E \subseteq F$ der Fixkörper unter σ, so hat man für kommutative K-Algebren A wegen $(A \otimes_K E) \otimes_E F \cong A \otimes_K F$

$$\begin{aligned} G_y(A) &= \{x \in M_m(F) \otimes_K A \mid xx^{J \otimes \mathrm{id}} = 1\} \\ &= \{x \in M_m(F) \otimes_E (E \otimes_K A) | \, x \cdot x^{J \otimes \mathrm{id}} = 1\} \\ &= U_{h'}(A \otimes_k E) = R_{E/K}(U_{h'})(A). \end{aligned}$$

Für $K = \mathbb{R}$ ist $L = \mathbb{C}$ und $L[y] = L$ und damit $G_y = G$, also $\mu_y = \{1\}$. Für $K \neq \mathbb{R}$ ist $H^1(\bar{K}/K, G_y) = H^1(\bar{K}/K, R_{E/K} U_{h'}) = H^1(\bar{K}/E, U_{h'})$ (vgl. [12, Chap. I, Sektion 1.3]) und daher ist nach Gleichung (3)

$$|H^1(\bar{K}/K, G_y)| = |H^1(\bar{K}/K, U_h)|.$$

Bezeichnet SU_h die spezielle unitäre Gruppe zur hermiteschen Form h, so hat man eine exakte Sequenz algebraischer Gruppen

$$1 \to SU_h \to U_h \xrightarrow{\det} {}^1R_{L/K} G_m \to 1$$

und daher eine exakte Sequenz

$$H^1(\bar{K}/K, SU_h) \to H^1(\bar{K}/K, U_h) \xrightarrow{\det_*} H^1(\bar{K}/K, {}^1R_{L/K} G_m).$$

$(\det)_*$ ist ein Isomorphismus, da nach [12] $H^1(\bar{K}/K, SU_h) = \{1\}$ ist und $H^1(\bar{K}/K, {}^1R_{L/K} G_m) = K^*/N_{L/K} L^*$ von der Ordnung 2 ist. Schränkt man die Determinantenabbildung $\det\colon M_n(L) \to L$ auf $Z_y = M_m(F)$ ein, so gilt etwa nach [8, S. 28, Formel (3.6)]

$$\det/Z_y = N_{F/L} \circ (\det_F), \tag{4}$$

wenn $\det_F$ die Determinantenabbildung von $M_m(F)$ nach F bezeichnet. Für die induzierten Morphismen algebraischer Gruppen ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_h \arrow[r, "\det"] & {}^1R_{L/K}G_m \\ G_y \arrow[u, hook] \arrow[r, "R_{E/K}(\det_F)"] & R_{E/K}({}^1R_{F/E}G_m) \arrow[u, "N_{F/L}"'] \end{tikzcd}$$

dem das folgende kommutative Diagram in der Kohomologie entspricht:

$$\begin{tikzcd} H^1(\bar{K}/K, U_h) \arrow[r, "(\det)_*"] & H^1(\bar{K}/K, {}^1R_{L/K}G_m) \\ H^1(\bar{K}/K, G_y) \arrow[u] \arrow[r, "(R_{E/K}(\det_F))_*"] & H^1(\bar{K}/K, R_{E/K}({}^1R_{F/E}G_m)) \arrow[u, "(N_{F/L})_*"'] \end{tikzcd}$$

$(R_{E/K}(\det_F))_*$ ist wie $(\det)_*$ ein Isomorphismus; für die Bestimmung von μ_y genügt es daher, $(N_{F/L})_*$ zu untersuchen. Man hat ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & R_{E/K}G_m \arrow[r] \arrow[d, "N_{E/K}"] & R_{F/K}G_m \arrow[r] \arrow[d, "N_{F/L}"] & R_{E/K}({}^1R_{F/E}G_m) \arrow[r] \arrow[d, "N_{F/L}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & G_m \arrow[r] & R_{L/K}G_m \arrow[r] & {}^1R_{L/K}G_m \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

dem in der Kohomologie wegen

$$H^1(\bar{K}/K, R_{F/K}G_m) = H^1(\bar{K}/F, G_m) = \{1\} = H^1(\bar{K}/K, R_{L/K}G_m)$$

ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H^1(\bar{K}/K, R_{E/K}({}^1R_{F/E}G_m)) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\bar{K}/K, R_{E/K}G_m) = H^2(\bar{K}/E, G_m) \arrow[d] \\ 1 \arrow[r] & H^1(\bar{K}/K, {}^1R_{L/K}G_m) \arrow[r] & H^2(\bar{K}/K, G_m) \end{tikzcd}$$

entspricht. Man rechnet nach (vgl. [18, I-13]), daß die hier auftretende Abbildung $H^2(\bar{K}/E, G_m) \to H^2(\bar{K}/K, G_m)$ gerade die Corestriktion ist. Diese ist für lokale Körper injektiv, daher ist auch $(N_{F/L})_*$ injektiv und also ist $\mu_y = \{1\}$. Damit hat man insgesamt den

SATZ 1. *Seien L quadratische Erweiterung des lokalen Körpers K, h hermitesche Form über L/K, U_h die zugehörige unitäre Gruppe und $x, y \in U_h(K)$ unitäre Transformationen mit irreduziblen Minimalpolynomen* *über L. x und y sind genau dann konjugiert in $U_h(K)$, wenn sie dasselbe irreduzible Minimalpolynom besitzen.*

b. *G ist innere Form der SL_n*

Nach [12] ist G Normeinsgruppe einer zentralen einfachen K-Algebra B. Wie bei den inneren Formen der Gruppen GL_n läßt sich $|\mu_y|$ leicht berechnen auch ohne Benutzung kohomologischer Methoden. Haben nämlich $x, y \in G(K)$ dasselbe irreduzible Minimalpolynom, so sind x und y nach dem Satz von Skolem und Noether konjugiert in B^*, etwa $x = zyz^{-1}$ mit $z \in B^*$.

Bezeichnet dann F den Körper $K[y]$, so ist der Zentralisator Z_y von y in B eine zentrale einfache F-Algebra und es ist $x \sim y$ in $G(K)$ genau dann, wenn die reduzierte Norm von z in $RN_B(Z_y^*)$ enthalten ist, daher ist $|\mu_y| = |RN_B(B^*)/RN_B(Z_y^*)|$. Nun ist etwa nach [12, S. 70]

$$RN_B(B^*) = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{falls } K = \mathbb{R} \text{ und } B \text{ Matrixring über den Hamiltonschen} \\ & \text{Quaternionen } \mathbb{H} \text{ ist,} \\ K^* & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach [8, S. 28, Formel (3.6)] berechnet sich $RN_B(Z_y^*)$ zu

$$RN_B(Z_y^*) = N_{F/K}(RN_{Z_y}(Z_y^*), \text{ also}$$

$$RN_B(Z_y^*) = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{falls } K = \mathbb{R} \text{ und } B \text{ Matrixring über } \mathbb{H}, \\ N_{F/K}(F^*) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insgesamt hat man für die inneren Formen der Gruppen SL_n:

$$|\mu_y| = \begin{cases} 1 & \text{falls } K = \mathbb{R} \text{ und } G \neq SL_n, \\ |K^*/N_{F/K}(F^*)| & \text{mit } F = K[y] \text{ sonst.} \end{cases}$$

c. *G ist äußere Form der SL_n*

G ist die spezielle unitäre Gruppe SU_h einer hermiteschen Form h, die zu einer quadratischen Erweiterung L des Grundkörpers K gehört. Ist $K = \mathbb{R}$, also $L = \mathbb{C}$ und hat $y \in SU_h(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ irreduzibles Minimalpolynom über $L = \mathbb{C}$, so ist $G_y = G$ und $\mu_y = \{1\}$ und man hat nichts zu zeigen. Ist K nichtarchimedisch, so ist nach [12] $H^1(\bar{K}/K, SU_h) = \{1\}$ und daher $\mu_y = H^1(\bar{K}/K, G_y)$. Hat $y \in SU_h(K)$ irreduzibles Minimalpolynom über L, so hat man für die Berechnung von μ_y eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow G_y \longrightarrow \tilde{G}_y \xrightarrow{\varphi} {}^1R_{L/K}G_m \longrightarrow 1,$$

in der $\tilde{G}_y$ den Zentralisator von y in U_h bezeichnet und $\varphi: \tilde{G}_y \to {}^1R_{L/K}G_m$ durch die Determinante von $M_n(L)$ nach L induziert wird, $n = \dim_L(h)$. Wie in Abschnitt (a) läßt sich φ folgendermaßen faktorisieren:

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}_y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "R_{E/K}(\det_F)"'] & & {}^1R_{L/K}G_m \\ & R_{E/K}({}^1R_{F/E}G_m) \arrow[ur, "N_{F/L}"'] & \end{tikzcd}$$

dabei haben F, E und $\det_F$ die gleiche Bedeutung wie in Abschnitt (a). In der Kohomologiesequenz

$$1 \to G_y(K) \to \tilde{G}_y(K) \to {}^1L^* = ({}^1R_{L/K}G_m)(K) \to H^1(\bar{K}/K, G_y)$$

$$\to H^1(\bar{K}/K, \tilde{G}_y) \xrightarrow{\varphi_*} H^1(\bar{K}/K, {}^1R_{L/K}G_m)$$

ist φ_* ein Isomorphismus (vgl. Abschnitt (a)), daher gilt

$$\mu_y = H^1(\bar{K}/K, G_y) = {}^1L^*/N_{F/L}({}^1F^*),$$

wenn ${}^1F^* := \{x \in F \mid N_{F/E}(x) = 1\}$ ist. Zur weiteren Berechnung der Gruppen μ_y benutzen wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & E^* \arrow[r] \arrow[d] & F^* \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "N_{F/L}"] & {}^1F^* \arrow[r] \arrow[d, "N_{F/L}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & K^* \arrow[r] & L^* \arrow[r, "\Psi"] & {}^1L^* \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\Psi(x) := x^\sigma/x$, wenn $\sigma: F \to F$ wie in Teil (a) den nichttrivialen Automorphismus von F über E bezeichnet. σ eingeschränkt auf L ist der nichtriviale Automorphismus von L über K. Damit ist ${}^1L^*/N_{F/L}({}^1F^*) = \Psi(L^*)/N_{F/L}\Psi(F^*)$. Für $x \in L^*$ gilt genau dann $\Psi(x) \in N_{F/L}({}^1F^*)$, wenn $x^\sigma/x = N_{F/L}(e^\sigma/e)$ ist mit einem $e \in F^*$, also genau dann, wenn es ein $e \in F^*$ gibt, so daß

$$\left(\frac{x}{N_{F/L}(e)}\right)^\sigma = \frac{x}{N_{F/L}(e)} \text{ Element von } K^* \text{ ist.}$$

Damit ist $\Psi(x) \in N_{F/L}({}^1F^*)$ gleichbedeutend mit $x \in N_{F/L}(F^*) \cdot K^*$ und daher gilt:

$$\mu_y \cong {}^1L^*/N_{F/L}({}^1F^*) \cong L^*/N_{F/L}(F^*) \cdot K^*.$$

Diese Faktorgruppe läßt sich mittels lokaler Klassenkörpertheorie weitgehend berechnen. Zunächst folgt stets: $1 \leqslant |\mu_y| \leqslant [F:L]$. Die Größe von $|\mu_y|$ hängt vom Verzweigungsverhalten der Erweiterung F/K *ab*. Ohne alle Fälle genau durchzudiskutieren, begnügen wir uns hier mit der Angabe von zwei Extremfällen:

(I) *F/K ist unverzweigt.* Dann ist jede Einheit in L Norm einer Einheit in F, und da ein Primelement von K ein ebensolches in L ist, folgt:

$$L^*/N_{F/L}(F^*) \cdot K^* = \{1\}, \qquad \text{d. h. } \mu_y = \{1\}.$$

(II) *L/K unverzweigt und F/L rein verzweigt, abelsch, zur Normengruppe $U_L^1 \cdot \langle \pi_L \rangle$ gehörend* (vgl. [14, S. 182, Satz 7.19]) (dabei sind U_L^1 die Einseinheiten von L, und π_L ein Primelement von L und $\langle \pi_L \rangle$ die von π_L in L^* erzeugte zyklische Untergrouppe).

F/L hat den Grad (q^2-1), wenn q die Anzahl der Elemente des zu K gehörenden Restklassenkörpers bezeichnet. Sind U_L bzw. U_K die jeweiligen Einheitengruppen, so gilt:

$$L^*/N_{F/L}(F^*) \cdot K^* \cong U_L/U_L^1 U_K;$$

da $U_L^1 \cdot U_K/U_L^1 \cong U_K/U_K^1$, also von der Ordnung $q-1$ ist, und andererseits U_L/U_L^1 die Ordnung q^2-1 hat, folgt:

$$|\mu_y| = |U_L/U_L^1 \cdot U_K| = q+1.$$

d. *G ist K-Form der symplektischen Gruppe Sp_{2n}*

Jeder K-Form G der Gruppe Sp_{2n} entspricht eine zentrale einfache K-Algebra B der Dimension $(2n)^2$ über K mit einer Involution I erster Art vom alternierenden Typ über K (d. h. die I-symmetrischen Elemente von B haben die Dimension $2n(2n-1)/2$ über K). Für kommutative K-Algebren A ist $G(A) = \{x \in B \otimes_K A \mid xx^I = 1\}$. Für $y \in G(K)$ mit irreduziblem Minimalpolynom über K sei $F = K[y]$. Ist $F = K$, so ist $G_y = G$ und daher $\mu_y = \{1\}$.

Andernfalls ist der Zentralisator von F in B eine zentrale einfache F-Algebra Z_y, und wegen $yy^I = 1$ induziert I auf Z_y eine Involution zweiter Art. Bezeichnet $E \subseteq F$ den Fixkörper unter I, so rechnet man wie in Teil (a) nach:

G_y ist die Restriktion der unitären Gruppe zu einer hermiteschen Form h' über F/E: $G_y = R_{E/K} U_{h'}$.

Ist K nichtarchimedischer lokaler Körper, so ist $H^1(\bar{K}/K, G) = \{1\}$ (vgl. [12]) und $H^1(\bar{K}/K, R_{E/K} U_{h'}) = H^1(\bar{K}/E, U_{h'}) = \mathbb{Z}_2$, also: $|\mu_y| = 2$.

Für $K = \mathbb{R}$ hat man zwei Fälle:

(I) $B = M_{2n}(\mathbb{R})$,

(II) $B = M_n(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$ die Hamiltonschen Quaternionen.

Im Fall (I) ist $G = Sp_{2n}$ und $H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, G) = H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, Sp_{2n}) = \{1\}$, also

$\mu_y = H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, G_y)$. $|\mu_y|$ ist eins, wenn $y = \pm 1$ ist, andernfalls ist $|\mu_y| = |H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, G_y)| = |H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, U_{h'})| = n+1$, denn $H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, U_{h'})$ klassifiziert gerade die Klassen n-dimensionaler hermitescher Formen über $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

Im zweiten Fall ist G die unitäre Gruppe einer hermiteschen Form h der Dimension n über $\mathbb{H}$ bezüglich der Standardinvolution von $\mathbb{H}$. $H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, G)$ klassifiziert diese hermiteschen Formen, ein vollständiges Invariantensystem der Isomorphieklassen dieser Formen wird durch die Dimension und die Signatur gegeben (vgl. [11]), daher ist $|H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, G)| = n+1$. Für $y \in G(K)$, die im Zentrum von G liegen, ist $\mu_y = \{1\}$. Hat $y \in G(K)$ irreduzibles Minimalpolynom vom Grad 2 über $\mathbb{R}$, so ist G_y wieder unitäre Gruppe zu einer hermiteschen Form h' der Dimension n über $\mathbb{C}$ und es ist $|H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, G_y)| = n+1$. μ_y ist trivial, denn man rechnet nach, daß bei der Abbildung $H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, G_y) \to H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, G)$, die jeder Isomorphieklasse hermitescher Formen über $\mathbb{C}$ eine solche über $\mathbb{H}$ zuordnet, die Signaturen der betreffenden Formen die gleichen sind. Damit hat man insgesamt für die K-Formen der symplektischen Gruppen Sp_{2n}:

$$|\mu_y| = \begin{cases} 1 & \text{falls } K = K[y] \text{ oder: } K = \mathbb{R} \text{ und } G \neq Sp_{2n}, \\ 2 & \text{falls } [K[y]:K] \geqslant 2 \text{ und } K \neq \mathbb{R}, \\ n+1 & \text{falls } K = \mathbb{R},\ K[y] = \mathbb{C} \text{ und } G = Sp_{2n}. \end{cases}$$

e. *G ist K-Form der orthogonalen Gruppe O_n*

Ist n ungerade, so sind die K-Formen von O_n die orthogonalen Gruppen O_q zu quadratischen Formen q der Dimension n. Hat $y \in O_q(K)$ irreduzibles Minimalpolynom $m(t)$ über K, so ist bei $n \equiv 1 \bmod 2$ notwendig $y = \pm 1$, da der Grad von $m(t)$ entweder 1 oder durch 2 teilbar ist (vgl. [13, remark 1.3]) und das charakteristische Polynom von y eine Potenz von $m(t)$ ist. Man kann sich daher bei (e) auf den Fall $n \equiv 0 \bmod 2$ beschränken. Dann sind zwei Fälle möglich (vgl. [12]):

(I) G ist die unitäre Gruppe U einer schiefhermiteschen Form über einem Quaternionenschiefkörper D mit Zentrum K bezüglich der Standardinvolution.

(II) G ist die orthogonale Gruppe O_q einer quadratischen Form q über K.

In beiden Fällen läßt sich der Funktor G folgendermaßen beschreiben: Für kommutative K-Algebren A ist

$$G(A) = \{x \in B \otimes_K A \mid xx^I = 1\}$$

mit einer zentralen einfachen K-Algebra B und einer Involution I erster Art auf B. Hat dann $y \in G(K)$ irreduzibles Minimalpolynom über K und sind

$F := K[y]$, $E \subseteq F$ der Fixkörper unter I, so hat man abgesehen von dem trivialen Fall $y = \pm 1$: G_y ist die Restriktion einer unitären Gruppe zu einer hermiteschen Form h über F/E, $G_y = R_{E/K} U_h$ (vgl. die analogen Rechnungen in den Abschnitten (a) und (d)). Deswegen ist

$$|H^1(K, G_y)| = \begin{cases} 2 & \text{falls } K \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}, \\ \dfrac{n}{2} + 1 & \text{falls } K = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Im Fall (I) hat man, wenn $SU \subseteq U$ die spezielle unitäre Gruppe bezeichnet, eine exakte Sequenz

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to H^1(\bar{K}/K, SU) \to H^1(\bar{K}/K, U) \to H^1(\bar{K}/K, \mathbb{Z}_2)$$

(vgl. [12]). Da $G_y = R_{E/K} U$ zusammenhängende algebraische Gruppe ist, faktorisiert sich die Abbildung $H^1(\bar{K}/K, G_y) \to H^1(\bar{K}/K, U)$ folgendermaßen:

$$\begin{tikzcd} H^1(\bar{K}/K, SU) \arrow[rr, "f"] & & H^1(\bar{K}/K, U) \\ & H^1(\bar{K}/K, G_y) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Nun ist $H^1(\bar{K}/K, SU) \cong \mathbb{Z}_2$ (vgl. [12, S. 135] bzw. für $K = \mathbb{R}$ [10, S. 546]) daher wird $H^1(\bar{K}/K, SU)$ bei f auf die 1 abgebildet und man erhält so: $\mu_y = H^1(\bar{K}/K, G_y)$.

Daher hat man im Fall (I) insgesamt:

$$|\mu_y| = \begin{cases} 1 & & K = F = K[y], \\ 2 & \text{falls} & [F:K] > 1 \text{ und } K \neq \mathbb{R}, \\ m+1 & & K = \mathbb{R}, F = \mathbb{C} \text{ und } [B:\mathbb{R}] = (2m)^2. \end{cases}$$

Im zweiten Fall, in dem G die orthogonale Gruppe $O = O_q$ einer quadratischen Form q über K ist, hat man, wenn $SO \subseteq O$ die spezielle orthogonale Gruppe bezeichnet, eine exakte Sequenz:

$$1 \to H^1(\bar{K}/K, SO) \to H^1(\bar{K}/K, O) \to H^1(\bar{K}/K, \mathbb{Z}_2).$$

Den trivialen Fall $y = \pm 1$ ausgenommen ist $G_y = R_{E/K} U_h$ zusammenhängende algebraische Gruppe, daher faktorisiert sich die Abbildung $H^1(\bar{K}/K, G_y) \to H^1(\bar{K}/K, O)$ folgendermaßen:

$$\begin{tikzcd} H^1(\bar{K}/K, SO) \arrow[rr] & & H^1(\bar{K}/K, O) \\ & H^1(\bar{K}/K, G_y) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Zum Nachweis von $\mu_y = \{1\}$ hat man die Abbildung $H^1(\bar{K}/K, G_y) \to H^1(\bar{K}/K, SO)$ genauer zu untersuchen. Wie man dies etwas anders als in [13] mit den hier benutzten Methoden durchführen kann, sei hier nur kurz angedeutet:

Ist V der quadratischen Form q zugrunde liegende K-Vektorraum, so hat V eine natürliche $F = K[y]$-Vektorraumstruktur. Man kann die Zentralisatoren $Z_F \subseteq Z_E$ von F bzw. E in $B = \mathrm{End}_K V$ mit $\mathrm{End}_F V$ bzw. $\mathrm{End}_E V$ identifizieren. Die durch q auf $B = \mathrm{End}_K V$ induzierte Involution I erster Art transformiert $\mathrm{End}_F V$ bzw. $\mathrm{End}_E V$ in sich, die Einschränkung von I auf $\mathrm{End}_F V$ ist Involution zweiter Art und die von I auf $\mathrm{End}_E V$ Involution erster Art. Diesen Involutionen entsprechen eine hermitesche Form h über F/E und eine quadratische Form $\tilde{q}$ über E, h und $\tilde{q}$ sind durch I bis auf skalare Faktoren aus E^* eindeutig festgelegt. Man rechnet nach, daß bei geeigneter Wahl dieser skalaren Faktoren die Gleichungen $Sp_{F/K} \circ h = q$ und $Sp_{E/K} \circ \tilde{q} = q$ gelten, wenn $Sp_{F/K}$ (bzw. $Sp_{E/K}$) die Spur von F (bzw. E) nach K bezeichnet, und wenn man q (bzw. h, bzw. $\tilde{q}$) als Abbildung von V nach K (bzw. F, bzw. E) auffaßt. Nun ist $G_y = R_{E/K} U_h$ und die Abbildung $G_y \subsetneq SO$ läßt sich folgendermaßen faktorisieren:

$$\begin{tikzcd}
R_{E/K} U_h \arrow[rr] \arrow[dr] & & SO = SO_q \\
& R_{E/K} SO_{\tilde{q}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Zum Nachweis von $\mu_y = \{1\}$ genügt es, die Injektivität der Abbildungen $H^1(\bar{K}/K, R_{E/K} U_h) \xrightarrow{\varphi_1} H^1(\bar{K}/K, R_{E/K} SO_{\tilde{q}})$ und $H^1(\bar{K}/K, R_{E/K} SO_{\tilde{q}}) \xrightarrow{\varphi_2} H^1(\bar{K}/K, SO_q)$ festzustellen, Für φ_1 hat man ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd}
H^1(\bar{K}/K, R_{E/K} U_h) \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d] & H^1(\bar{K}/K, R_{E/K} SO_{\tilde{q}}) \arrow[d] \\
H^1(\bar{K}/E, U_h) \arrow[r, "\Psi_1"] & H^1(\bar{K}/E, SO_{\tilde{q}}),
\end{tikzcd}$$

wobei Ψ_1 wie φ_1 durch die Inklusion $\mathrm{End}_F V \subseteq \mathrm{End}_E V$ induziert ist und die senkrechten Pfeile Isomorphismen sind. Man rechnet nach, daß bei Ψ_1 jeder hermiteschen Form h' über F/E die quadratische Form $Sp_{F/E} \circ h'$ über E zugeordnet wird; nach [11] ist daher Ψ_1 und damit auch φ_1 injektiv.[1]

Falls $K = E$ ist (dies ist insbesondere für $K = \mathbb{R}$ der Fall), hat man dann bereits $\mu_y = \{1\}$ gezeigt. Andernfalls hängt—wie bereits in [16] bemerkt wurde—die Abbildung $H^1(\bar{K}/K, R_{E/K} SO_{\tilde{q}}) \xrightarrow{\varphi_2} H^1(\bar{K}/K, SO_q)$ eng mit der

[1] Anmerkung: Das ist übrigens für beliebige nicht notwendig lokale Grundkörper der Charakteristik $\neq 2$ richtig!

Corestriktionsabbildung $H^2(\bar{K}/E, G_m) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^2(\bar{K}/K, G_m)$ zusammen. Genauer gilt folgendes: Ist $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\} \subseteq \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ ein Repräsentantensystem von $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)/\mathrm{Gal}(\bar{K}/E)$, so bezeichne

$$f\colon SO_{\tilde{q}}(\bar{K}) \to (R_{E/K} SO_{\tilde{q}})(\bar{K}) = \prod_1^r {}^{\sigma_i}(SO_{\tilde{q}}(\bar{K}))$$

den $\mathrm{Gal}(\bar{K}/E)$-Morphismus, der ein Element $x \in SO_{\tilde{q}}(\bar{K})$ auf das Element $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ in $\prod_1^r {}^{\sigma_i}(SO_{\tilde{q}}(\bar{K}))$ mit

$$x_i = \begin{cases} x & \text{falls } i = 1 \\ 1 & \text{falls } 1 = 2, \ldots, r \end{cases} \qquad \text{abbildet.}$$

Ist i die Injektion $(R_{E/K} SO_{\tilde{q}})(\bar{K}) \subsetneq SO_q(\bar{K})$, so induziert $\varphi := i \circ f$ in der Kohomologie eine Abbildung $N\varphi^1\colon H^1(\bar{K}/E, SO_{\tilde{q}}) \to H^1(\bar{K}/K, SO_q)$ (zur Definition von $N\varphi^1$ siehe [16, Seite 77, Formel [8] sowie Seite 87, Theorem 7]). $N\varphi^1$ ist für lokale Körper injektiv ([16, S. 96, 97]). Die oben mit φ_2 bezeichnete Abbildung ist die von i in der Kohomologie induzierte. Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} H^1(\bar{K}/K, R_{E/K} SO_{\tilde{q}}) \arrow[r, "\varphi_2"] & H^1(\bar{K}/K, SO_q) \\ H^1(\bar{K}/E, SO_{\tilde{q}}) \arrow[u, "Nf^1"] \arrow[ur, "N\varphi^1"'] & \end{tikzcd}$$

folgt dann auch wegen $H^1(\bar{K}/E, SO_{\tilde{q}}) = \mathbb{Z}_2 = H^1(\bar{K}/K, SO_q)$ die Injektivität von φ_2 (zur Definition von Nf^1 vgl. [16, S. 77]). Damit ist auch in diesem Fall $\mu_y = \{1\}$ und das liefert gerade den in der Einleitung erwähnten Satz von Milnor.

Bemerkung. Hat K positive Charakteristik $p \neq 2$, so läßt sich der Fall, in dem $y \in G(K)$ irreduzibles Minimalpolynom hat und $K[y]$ (bzw. $L[y]$) separable Körpererweiterung von K ist, im wesentlichen genauso behandeln wie der Fall $\mathrm{Char}\, K = 0$. Man ersetze $\bar{K}$ nur jeweils durch den separablen Abschluß $\bar{K}_s$ von K, und da wir uns hier ohnehin bei (a) bis (e) auf klassische Gruppen beschränkt haben, könnte man die jeweils benutzten kohomologischen Resultate ohne Rückgriff auf [5] ad hoc beweisen. Schwieriger ist dagegen der Fall $\mathrm{Char}\, K = p \neq 2$ und $K[y]$ (bzw. $L[y]$) inseparabel über K. Ersetzt man dann wieder $\bar{K}$ durch den separablen Abschluß $\bar{K}_s$, so läßt sich zwar Lemma 3 noch beweisen etwa unter Benutzung von [3, Seite 257, 2.15, Exercise (ii)], aber z. B. die Berechnung von $H^1(\bar{K}_s/K, R_{E/K} U_h) - U_h$ und E wie in (a)—zwingt uns, den Rahmen der gewöhnlichen Galoiskohomologie zu verlassen und Amitsur-Kohomologie zu verwenden. Dann läßt sich zwar noch $H^1(K, R_{E/K} U_h) = H^1(E, U_h)$ beweisen (vgl. [7, S. 408, Proposition 8.4]), aber mir ist nicht klar, wie man die Corestriktion im Falle inseparabler Erweiterungen zu definieren hat und ob die in [16] bewiesenen Eigenschaften der Corestriktion sich auf inseparable Erweiterungen übertragen lassen. Daher bleibt für Char $K = p > 2$ bei der Behandlung der Fälle (a) und (e) eine Lücke. Für Char $K = 2$ treten bei (d) und (e) noch zusätzliche Schwierigkeiten auf.

2. Lokal–Global–Fragen bei Konjugationsklassen

Im folgenden sei K ein algebraischer Zahlkörper und G eine über K definierte lineare algebraische Gruppe. Für Primstellen v von K bezeichnet K_v die Komplettierung von K bezüglich v. Sind $x, y \in G(K)$, so gilt offenbar stets:

$$x \sim y \text{ in } G(K) \Rightarrow x \sim y \text{ in } G(K_v) \qquad \text{für all Primstellen } v \text{ von } K.$$

Es liegt nahe, danach zu fragen, wann die Umkehrung gilt, d. h. wann ein Lokal–Global–Prinzip für die Konjugationsklassen in $G(K)$ richtig ist. Ein kohomologisches Kriterium dafür erhält man jedenfalls dann, wenn für die Gruppe G selbst das Hasseprinzip gilt im Sinne der folgenden

Definition. G sei eine über dem Zahlkörper K definierte lineare algebraische Gruppe. Für G gilt das Hasseprinzip, wenn für beliebige endliche galoissche Erweiterungen L/K die natürliche Abbildung $H^1(L/K, G(L)) \to \prod_{v,w;w|v} H^1(L_w/K_v, G(L_w))$ injektiv ist.

Dann hat man den

Satz 2. *G sei lineare algebraische Gruppe über K und es gelte für G das Hasseprinzip. Dann gilt für die Konjugationsklassen in $G(K)$ das Lokal–Global–Prinzip genau dann, wenn bei beliebigem $y \in G(K)$ für den Zentralisator G_y von y in G das Hasseprinzip gilt.*

Beweis. Es gelte das Lokal–Global–Prinzip für die Konjugationsklassen in $G(K)$. Ist dann $y \in G(K)$ und bezeichnet $G_y \subseteq G$ den Zentralisator von y in G, so hat man für beliebige galoissche Erweiterungen L/K ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^1(L/K, G(L)) & \xrightarrow{\omega_L} & \prod_{w|v} H^1(L_w/K_v, G(L_w)) \\
\uparrow{\scriptstyle \iota_y} & & \uparrow \\
H^1(L/K, G_y(L)) & \xrightarrow{\omega_y} & \prod_{w|v} H^1(L_w/K_v, G_y(L_w))
\end{array}$$

Bezeichnet $\mu_y(L)$ den Kern der Abbildung ι_y, so folgt aus der Kommutativität des obigen Diagramms und der vorausgesetzten Injektivität vom ω_L: Ker $\omega_y \subseteq \mu_y(L)$. Jedem $a \in$ Ker ω_y entspricht daher ein $x \in G(K)$, welches einerseits konjugiert zu y ist in $G(L)$, da ja $a \in \mu_y(L)$ ist, und welches andererseits lokal überall zu y konjugiert ist in $G(K_v)$, weil $\omega_y(a) = 1$ ist.

Da nach Voraussetzung ein Lokal–Global–Prinzip für die Konjugationsklassen in $G(K)$ gilt, ist x bereits über K konjugiert zu y, also Ker $\omega_y = \{1\}$.

Sei umgekehrt bei beliebigem $y \in G(K)$ für G_y das Hasseprinzip richtig. Zum Nachweis der Richtigkeit des Lokal–Global–Prinzips für die Konjugationsklassen in $G(K)$ benötigen wir einen

HILFSSATZ 1. *Es seien G eine lineare algebraische Gruppe über dem Zahlkörper K und x, $y \in G(K)$. Dann gilt: Ist $x \sim y$ in $G(K_v)$ für eine Primstelle v von K, so ist $x \sim y$ in $G(L)$ für eine geeignete galoissche Erweiterung L/K.*

Den Beweis des Hilfssatzes stellen wir an den Schluß des Beweises von Satz 4.

Sind x, $y \in G(K)$ lokal überall konjugiert, so entspricht nach obigem Hilfssatz dem Element x eine Kohomologieklasse in $H^1(L/K, G_y(L))$, die unter der Abbildung $\omega_y: H^1(L/K, G_y(L)) \to \prod_{w|v} H^1(L_w/K_v, G_y(L_w))$ auf die Eins abgebildet wird. Da andererseits nach Voraussetzung Ker $\omega_y = \{1\}$ ist, folgt: $x \sim y$ in $G(K)$.

Nun zum

Beweis des Hilfssatzes. Die algebraische Menge $V = \{z \in G \mid zxz^{-1} = y\}$ besitzt nach Voraussetzung einen K_v-rationalen Punkt und daher nach dem Hilbertschen Nullstellensatz auch einen $\bar{K}$-rationalen Punkt, also ist $x \sim y$ in $G(\bar{K})$ und das war zu zeigen.

Mit dem in der Einleitung erwähnten Resultat von T. Asai ([2, Theorem 4.7]) erhält man das

KOROLLAR ZU SATZ 2. *Es seien K einen Zahlkörper und G eine über K definierte orthogonale Gruppe (bzw. symplektische Gruppe, bzw. unitäre Gruppe einer hermiteschen Form zu einer quadratischen Erweiterung von K). Ist $y \in G(K)$, so gilt für den Zentralisator G_y von y in G das Hasseprinzip.*

BEMERKUNG. Auch ohne Benutzung von [2] ließe sich das obige Korollar durch direkte Berechnung der Zentralisatoren beweisen (vgl. [3, Abschnitt E]), indem man sich zunächst auf halbeinfache Elemente $y \in G(K)$ beschränkt und dann die Zentralisatoren unipotenter Elemente in den Zentralisatoren der halbeinfachen $y \in G(K)$ bestimmt. Das führt aber zu keinem gegenüber [2] einfacheren Beweis (vgl. auch unten den Beweis von Satz 3).

Es werden daher hier nur die inneren Formen der Gruppen SL_n untersucht, für die der Wall'sche Ansatz nichts mehr liefert. Daß man hier im allgemeinen kein Lokal–Global–Prinzip für die Konjugationsklassen erwarten kann, zeigt das folgende

BEISPIEL. $G = SL_4$, L/K Zahlkörper, so daß $[L:K] = 4$. Dann läßt sich L in die K-Algebra $M_4(K)$ einbetten, so daß der Zentralisator von L in $M_4(K)$ wieder L ist und für $x \in L$ $\det x = N_{L/K}(x)$ gilt. Die Normeinsgruppe von L ist die Gruppe der K-rationalen Punkte des K-Torus ${}^1R_{L/K}G_m = T$, $T \subseteq SL_4$ ist maximaler Torus. Ist $y \in T(K)$ regulär, so ist $G_y = T$. Etwa nach [15, Seite 70] gilt für $T = {}^1R_{L/K}G_m$ das Hasseprinzip genau dann, wenn der Hasse'sche Normensatz für L/K richtig ist, d. h. wenn jede Zahl $\lambda \in K^*$, die lokal überall Norm ist, schon Norm einer Zahl ζ von L^* ist. Es ist bekannt, daß dies für Erweiterungen vom Grad 4 im allgemeinen nicht richtig ist, ein Gegenbeispiel ist etwa $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$ (vgl. [6, Seite 199]). Damit gilt also für die regulären halbeinfachen Konjugationsklassen in $SL_4(\mathbb{Q})$ kein Lokal–Global–Prinzip. Ein solches gilt dann im allgemeinen natürlich erst recht nicht in den Gruppen SL_n mit $n \geqslant 4$.

Günstiger ist die Situation, wenn man sich auf die Gruppen SL_p, p Primzahl beschränkt. Hier gilt der

SATZ 3. *Für $G = SL_p$, p Primzahl, gilt über jedem Zahlkörper K ein Lokal–Global–Prinzip für die Konjugationsklassen in $G(K)$.*

Zum Beweis benötigen wir ein Lemma, auf das mich freundlicherweise Herr M. Kneser hingewiesen hat:

LEMMA 4. *Ist K Zahlkörper und $K' \supset K$ eine Körpererweiterung vom* Grad p, *so gilt für K'/K der Hasse'sche Normensatz.*

Beweis des Lemmas. Bezeichnet L' die galoissche Hülle von K'/K, und ist L ein zu einer p-Sylowgruppe von $\mathrm{Gal}(L'/K)$ gehöriger Unterkörper von L', so gilt für die zyklische Erweiterung L'/L des Hasse'sche Normensatz. Ist daher $\lambda \in K$ lokal überall Norm bei K'/K, so existiert ein $\xi \in L'$, so daß $N_{L'/L}(\xi) = \lambda$ ist. $[L':K]$ ist ein Teiler von $p!$, daher ist $[L':L] = p$ und $m := [L:K]$ und p sind teilerfremd, es sei etwa $1 = bp + am$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann ist λ Norm des Elements $\lambda^b N_{L'/K'}(\xi^a)$ aus K'.

Nun zum Beweis von Satz 3.

Sind $x, y \in SL_p(K)$ lokal überall konjugiert in SL_p, so haben x und y dasselbe Minimalpolynom über K und es existiert überdies ein $z \in GL_p(K)$ mit $zyz^{-1} = x$. Es genügt zu zeigen, daß der Zentralisator von y in $GL_p(K)$ ein Element w mit $\det w = (\det z)^{-1}$ enthält. Ist dazu $y = y_s y_u$ die Jordanzerlegung von y mit halbeinfachem Anteil $y_s \in SL_p(K)$ und unipotentem Anteil $y_u \in SL_p(K)$, so sei $m_s(t)$ das Minimalpolynom von $y_s \in SL_p(K)$. Es gelte etwa $m_s(t) = f_1(t) \cdots f_r(t)$ mit über K irreduziblen Polynomen $f_i(t) \in K[t]$ vom Grad d_i für $i = 1,\dots, r$. Sind dann für $i = 1,\dots, r$ K_i die Körper $K[t]/(f_i(t))$, so berechnet sich der Zentralisator Z_{y_s} von y_s in $M_p(K)$ folgendermaßen: $Z_{y_s} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ mit zentralen einfachen K_i – Algebren A_i. Ist das charakteristische Polynom von y_s von der Form $f_1(t)^{e_1} \cdots f_r(t)^{e_r}$ mit natürlichen Zahlen e_i, so gilt $[A_i : K_i] = e_i^2$.

Ist nun $r > 1$, so ist wegen $e_1 d_1 + \cdots + e_r d_r = p$, p Primzahl, der größte gemeinsame Teiler von $e_1 d_1, \dots, e_r d_r$ gleich 1 und man findet daher ganze Zahlen $m_1, \dots, m_r$, so daß $1 = m_1 e_1 d_1 + \cdots + m_r e_r d_r$ ist. Für beliebige $\lambda \in K^*$ berechnet sich dann die Determinante des Elements $w := (\lambda^{m_1}, \dots, \lambda^{m_r}) \in Z_{y_s} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r \subseteq M_p(K)$ zu $\lambda^{m_1 e_1 d_1} \cdots \lambda^{m_r e_r d_r} = \lambda$. Andererseits liegt w im Zentrum von Z_{y_s}, ist also auch mit y_u vertauschbar, liegt also im Zentralisator von $y = y_s y_u$ in $GL_p(K)$. Für $\lambda = (\det z)^{-1}$ folgt damit im Fall $r > 1$ die Behauptung.

Für $r = 1$ ist der Zentralisator von y in $Gl_p(K)$ gerade der Zentralisator von y_u in A_1^*, und man hat zwei Fälle:

(i) $d_1 = p$, $e_1 = 1$,

(ii) $d_1 = 1$, $e_1 = p$.

Im Fall (i) ist $Z_{y_s} = K_1 = K[t]/(m_s(t))$ Körper vom Grad p über K. Dann folgt die Behauptung mit dem bereits bewiesenen Lemma 4. Im Fall (ii) ist Z_{y_s} der volle Matrixring $M_p(K)$ und man hat den Zentralisator von y_u in $M_p(K)$ genauer zu untersuchen. Ist y_u nicht regulär, so läßt sich leicht zeigen, daß der Zentralisator von y_u in $GL_p(K)$ Elemente mit beliebig vorgeschriebener Determinante $\lambda \in K^*$ besitzt, und dann ist man fertig.

Ist dagegen y_u regulär, also in $GL_p(K)$ konjugiert zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

so ist der Zentralisator von y_u in SL_p K-isomorph zur Gruppe $\mu_p \times R$, dabei sind für kommutative K-Algebren A, $\mu_p(A)$ die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln und

$$R(A) = \left\{ (a_{iK}) \in M_p(A) \;\middle|\; \begin{array}{ll} a_{ii} = 1, & \text{für} \quad i = 1, p \\ a_{ij} = 0 & \phantom{\text{für}} \quad 1 \leqslant j < i \leqslant p \\ a_{ij} = a_{i+1,j+1} & \phantom{\text{für}} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant p-1 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & \cdots \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & \ddots & a \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, \ldots \in A \right\}.$$

Man rechnet leicht nach, daß $H^1(K, R) = \{1\}$ ist, und daß für μ_p das Hasseprinzip gilt (vgl. [1, S. 96 ff]). Damit folgt auch in diesem Fall unter Benutzung von Satz 2 die Behauptung.

Noch etwas einfacher als bei den Gruppen SL_n ist die Situation bei den anisotropen inneren Formen G der Gruppen SL_n, diese gehören zu Schiefkörpern D mit Zentrum K von Grad n^2 über K, es ist für kommutative K-Algebren A

$$G(A) = \{x \in D \otimes_K A \mid RN_D(x) = 1\}. \tag{5}$$

$G(K)$ besteht nur aus halbeinfachen Elementen und für reguläre $y \in G(K)$ ist der Zentralisator von y in D maximaler kommutativer Unterring von D. Die Zentralisatoren der regulären $y \in G(K)$ in G sind also gerade die Tori $T = {}^1R_{L/K}G_m$, wobei L maximaler kommutativer Teilkörper von D ist. Nach [15, Seite 70] gilt daher für die regulären Konjugationsklassen in $G(K)$ genau dan ein Lokal–Global–Prinzip, wenn für die maximalen kommutativer Teilkörper L von D über K der Hasse'sche Normensatz gilt. Nach [9, Theorem 3.1] ist dies jedenfalls für die über K galoisschen Teilkörper $L \subseteq D$ richtig. Speziell für $n = p$ Primzahl folgt ferner mit Lemma 4:

LEMMA 5. *Ist D Schiefkörper über dem Zahlkörper K vom* Grad p^2, *p Primzahl, und bezeichnet G die zum Schiefkörper D vermöge* (5) *gehörige K-Form der SL_p, so gilt für die Konjugationsklassen von $G(K)$ ein Lokal–Global–Prinzip.*

Bemerkung. Nennt man wie in [17] einen Oberkörper L von K K-adäquat, wenn L maximaler kommutativer Teilkörper eines zentralen Schiefkörpers D über K ist, so hat man nach [9]: Ist L/K galoissch und K-adäquat, so gilt für L/K der Hasse'sche Normensatz. Es wäre interessant zu wissen, ob dies auch allgemeiner für beliebige K-adäquate Erweiterungen L von K richtig ist.

Literatur

1. E. Artin und J. Tate, "Class Field Theory," Benjamin, New York, 1967.
2. T. Asai, The conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups over an algebraic number field, *J. Math. Kyoto Univ.* **16** (1976), 325–350.
3. A. Borel *et al.*, "Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups," Lecture Notes in Mathematics No. 131, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
4. N. Bourbaki, "Modules et anneaux semi-simples." Algèbre, Chap. 8, Hermann, Paris, 1958.
5. F. Bruhat und J. Tits, Groupes algébriques simples sur un corps local: cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan, *C. R. Acad. Sci. Paris* **263** (1966), 867–869.
6. J. W. S. Cassels und A. Fröhlich, "Algebraic Number Theory," Academic Press, London, 1967.
7. M. Demazure und A. Grothendieck, "Structure des schémas en groupes réductifs," Vol. III, Lecture Notes in Mathematics No. 153, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
8. P. Draxl und M. Kneser, "SK_1 von Schiefkörpern," Lecture Notes in Mathematics No. 778, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1980.
9. S. Gurak, On the Hasse norm principle, *J. Reine angew. Math.* **299/300** (1978), 16–27.
10. N. Jacobson, Simple Lie algebras over a field of characteristic zero, *Duke Math. J.* **4** (1938), 534–551.
11. N. Jacobson, A note on hermitian forms, *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940), 264–268.
12. M. Kneser, "Lectures on Galois cohomology of classical groups," Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1969.
13. J. Milnor, On isometries of inner product spaces, *Invent. Math.* **8** (1969), 83–97.
14. J. Neukirch, "Klassenkörpertheorie," B.I. Mannheim, 1969.
15. T. Ono, On the Tamagawa number of algebraic tori, *Ann. of Math.* **78** (1963), 47–73.
16. C. Riehm, The corestriction of algebraic structures, *Invent. Math.* **11** (1970), 73–98.
17. M. Schacher, Subfields of division rings, I, *J. Algebra* **9** (1968), 451–477.
18. J. P. Serre, "Cohomologie galoisienne," Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1965.
19. G. E. Wall, On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups, *J. Austral. Math. Soc.* **3** (1963), 1–62.